変形しないフレームの構成(位相幾何学的グラフ理論)

前原, 潤

数理解析研究所講究録
686巻 1989年 118-140

変形しないフレームの構成

琉球大学 前原 濶 (Hiroshi Maehara)

1. はじめに

伸び縮みしないいくつかの棒を,「自在ジョイント」でつなぎ合わせた構造物をフレームという。フレームについては,それが自由に変形するかどうかが,1つの関心事となる。これを数学的対象して扱うため,次のように定義する。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 内に頂点をもつグラフを $\mathbb{R}^d$ 内のフレーム (framework) という。$\mathbb{R}^d$ 内のフレームの各頂点を動かして

(1) 隣接する頂点間の距離を変えないで

(2) 隣接しない頂点間の距離を1つ以上変える

ことができるとき,フレーム F は (d次元で) 変形するという。このようなことが不可能なら, F は (d次元で) 変形しないとか定形であるという。例えば,フレーム F が完全グラフなら, F には隣接しない2点は存在しないから, F は定形である。

n個の頂点をもつグラフ G に対して, $\mathbb{R}^d$ の点 $p_1, \cdots, p_n$ を頂点とする G と同型なグラフ (フレーム) を G の実現といい,

記号 $G(p_1, \cdots, p_n)$ または, $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$ として,

簡単に $G(p)$ で表す。残念ながら,フレーム $G(p)$ が変形するか

どうかは，グラフ G の構造だけでは決まらず，点 $p \in \mathbb{R}^{nd}$ のとり方にも依存する。例えば図 1 の 2 つのフレームは，同一のグラフの平面上の 2 つの実現であるが，一方は変形し，他方は定形である。

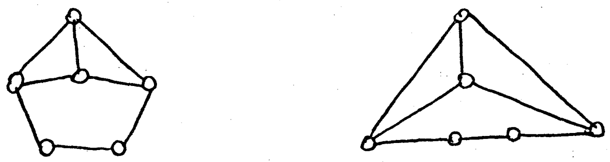


図 1

点 $p \in \mathbb{R}^{nd}$ のすべての座標が有理数体上，代数的に独立のとき点 p を一般点と呼ぶことにしよう。またこのとき $G(p)$ をグラフ G の一般実現ということにする。グラフ G の一般実現 $G(p)$ については，変形するかどうかはグラフ G の構造のみで決まり，一般点 p のとり方によらないのである。

一般実現 $G(p)$ が定形のとき，グラフ G は d 次元で一般に定形（簡単に d-定形）といい，$G(p)$ が変形するとき G は d 次元で一般に変形（d-変形）するという。

このノートでは d-定形グラフ G から，頂点数がもっと多い d-定形グラフを作る簡単な方法を示し，それを利用して，グラフの join，完全多組グラフ等の定形性に関するいくつかの結果を導く。

2. グラフの辺関数, ヤコビ行列 (復習)

一般に, 頂点数が一定のグラフでは, 辺の個数がふえていくと, d-定形となるチャンスが大きくなる。辺の個数は, 2点間の距離を指定する方程式の個数となるからである。しかし, "独立な" 方程式が何個得られるかということについては 難しい問題がある。

グラフの定形性の問題に, 陰関数定理を利用しだしたのは, Asimov-Roth (1978) あたりからであろう。以下, どのように陰関数定理が用いられるかを述べよう。

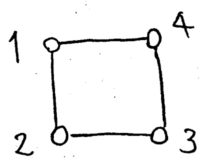
G を n コの頂点 $1, 2, \cdots, n$ をもつグラフとする。$\mathbb{R}^d$ 内に n コの点 $p_1, \cdots, p_n$ をとり, ij が G の辺であるときに限り p_i と p_j を辺で結んで G の実現 $G(p)$ $(p := (p_1, \cdots, p_n))$ を得る。G の各辺 e に対して 対応する $G(p)$ の辺 (線分) の長さの 2乗を $f_e(p)$ とする。例えば, $e = ij$ なら

$$f_e(p) = \|p_i - p_j\|^2 .$$

$f_e(p)$ は $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$ の関数である。これを G の, 辺 e に対応する <u>辺関数</u> という。p の nd コの座標を $x_1, \cdots, x_{nd}$ とすると 明らかに $f_e(p)$ は $x_1, \cdots, x_{nd}$ の "多項式" である。(実は, $f_e(p)$ を p の座標の多項式とするために $\|p_i - p_j\|$ の 2乗をとったのである。) グラフ G が m コの辺をもち, 対応する辺関数を $f_1(p), \cdots, f_m(p)$ とする。このとき $m \times nd$-行列

$$\left(\frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,nd}}$$

（関数 $f_1,\dots,f_m$ のヤコビ行列）を <u>Gの（辺関数の）ヤコビ行列</u>といい，$J_G(p)$で表す。$J_G(p)$は $m\times nd$－行列であるが，各要素を <u>d次元ベクトル</u>で表して $m\times n$－行列として書く方が簡単である。例えばグラフ



のヤコビ行列は，$p=(p_1,p_2,p_3,p_4)$として

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{18em}}^{\text{頂点}}} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
12 & 2(p_1-p_2) & 2(p_2-p_1) & 0 & 0 \\
23 & 0 & 2(p_2-p_3) & 2(p_3-p_1) & 0 \\
34 & 0 & 0 & 2(p_3-p_4) & 2(p_4-p_3) \\
41 & 2(p_1-p_4) & 0 & 0 & 2(p_4-p_1) \\
\hline
\end{array}$$

（左側の 12, 23, 34, 41 は 辺）

と表わされる。

グラフ G のヤコビ行列 $J_G(p)$ $(p\in\mathbb{R}^{nd})$ のランクの最大値を G の d-rank といい，$\mathrm{rank}_d(G)$ で表わす。

<u>定理 2.1</u>　G を頂点数 n の空でないグラフとすると，$n>d$ なら

$$\mathrm{rank}_d(G)\leq nd-\binom{d+1}{2}$$

である。また点 $p^\circ\in\mathbb{R}^{nd}$ での $J_G(p^\circ)$ のランクが $\mathrm{rank}_d(G)$ に等しいとき

(1) $\mathrm{rank}_d(G)<dn-\binom{d+1}{2}$ なら $G(p^\circ)$は変形する

(2) $\mathrm{rank}_d(G)=dn-\binom{d+1}{2}$ なら $G(p^\circ)$は定形である。

これを証明するため，陰関数定理の1つの帰結である次の定理を用いる。

<u>定理2.2.</u> mコのN変数の微分可能な関数

$$f_i(x_1, \dots, x_N) \qquad (i=1, \dots, m)$$

のヤコビ行列 $\left(\partial f_i / \partial x_j\right)$ が点 $p \in \mathbb{R}^N$で最大ランクrをとるとする。このとき点pの近くで

$$(*) \qquad f_i(x_1, \dots, x_N) = f_i(p) \qquad (i=1, \dots, m)$$

を満足するような点の全体は"$(N-r)$-次元の曲面"をなす。特に$r=N$なら点pの近くで(*)を満たす点はp以外にない。□

陰関数定理については，例えば，松島与三「多様体入門」，高木貞二「解析概論」や，L. Auslander - R. E. Mackenzie の"Introduction to Differentiable Manifold"を見るとよい。

<u>定理2.1の証明</u>．Gの辺の個数をmとし，$f_1, \dots, f_m$をGの辺関数とする。Gのヤコビ行列J_Gが点pで最大rank rをとるとしよう。まず，フレーム$G(p)$は$\mathbb{R}^d$内で"変形"しないように動かすことができる。つまり，$G(p)$を$\mathbb{R}^d$内の剛体とみて，運動させることができる。$\mathbb{R}^d$内の剛体運動は $d(d+1)/2 = \binom{d+1}{2}$コのパラメータで一意的に記述される。（$\mathbb{R}^d$の回転群$SO(d)$が

$d(d-1)/2$ 次元，平行移動が d 次元，従って $d(d-1)/2+d$ $=d(d+1)/2$ 次元）故に $G(p)$ を $\mathbb{R}^d$ 内で剛体運動させたとき対応する点 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ の $\mathbb{R}^{nd}$ 内での軌跡 M は $\binom{d+1}{2}$ 次元の曲面（多様体）となる。また曲面 M 上では G の辺関数の値は一定であるから点 p の近傍で

$$(**)\qquad f_i(x_1,\cdots,x_{nd})=f_i(p)\qquad (i=1,\cdots,m)$$

を満たすような点 $(x_1,\cdots,x_{nd})$ の全体 W は，少くとも $\binom{d+1}{2}$ 次元以上の曲面でなければならない。よって定理 2.2 から

$$nd-r\geqq\binom{d+1}{2},\quad\text{つまり}\quad r=\operatorname{rank}_d(G)\leqq nd-\binom{d+1}{2}.$$

さて，フレーム $G(p)$ を $\mathbb{R}^d$ 内で動かすというのは，$\mathbb{R}^{nd}$ 内の点 p から出発する曲線で，その上では各辺関数の値が一定であるような曲線を1つ指定することに他ならない。従って「p から出発する W 内の曲線で M からはみでるものが存在する」というのが，$G(p)$ が変形するための必要十分条件である。

$r<nd-\binom{d+1}{2}$ としよう。すると，定理 2.2 より

$$W\text{の次元}=nd-r>\binom{d+1}{2}=M\text{の次元}$$

であるから，W は M より次元の高い曲面となっている。従ってこの場合 p から出発し，M からはみでる曲線が W 内に存在する。よって $G(p)$ は変形する。

次に，$r = nd - \binom{d+1}{2}$ の場合。このときは，W と M は同次元となり，W は M に含まれてしまうから，M からはみでる曲線を W 内にとることは不可能。よって $G(p)$ は定形である。$\square$

定理 2.3

(1) $\mathrm{rank}_d(G) = nd - \binom{d+1}{2}$ なら G は d-定形である。

(2) $\mathrm{rank}_d(G) < nd - \binom{d+1}{2}$ なら G は d-変形する。

証明．$\omega \in \mathbb{R}^{nd}$ を一般点（すべての座標が $\mathbb{Q}$ 上代数的に独立）とする。G のヤコビ行列が点 ω で最大ランクをとることを言えばよい。$\mathrm{rank}_d(G) = r$ としよう。$J_G(p)$ $(p \in \mathbb{R}^{nd})$ の r 次のすべての小行列式を $D_1, \cdots, D_N$ $\left(N = \binom{m}{r} \cdot \binom{nd}{r}\right)$ とする。

$$g(p) = D_1^2 + \cdots + D_N^2$$

とおくと $g(p)$ は p の座標の多項式である。また $J_G(p)$ のランクの最大値は r であるから，$g(p)$ は恒等的に 0 でない。従って $g(\omega) \neq 0$（さもないと ω の nd 個の座標は代数的に従属となってしまう！）．故に $\mathrm{rank}\, J_G(\omega) = r$．$\square$

系 2.4．頂点数 n，辺数 $< nd - \binom{d+1}{2}$ のグラフ G は d-定形でない。

証明. Gの辺数 $< nd-\binom{d+1}{2}$ なら，Gのヤコビ行列の行数 $< nd-\binom{d+1}{2}$．よって $\mathrm{rank}_d(G) < nd-\binom{d+1}{2}$． □

（注）辺数 $< nd-\binom{n+1}{2}$ でも特別な点配置をとると，定形なフレームになることがある。前の図1を見よ。

3. 操作 A_d, B_d

頂点数 $\geqq d+1$ の d-定形グラフGから，頂点数がGより多い d-定形グラフを作るための2つの操作 A_d, B_d を導入しよう。

操作 A_d：グラフGに次数 d の頂点 0（ゼロ）を新しく追加する。その結果得られるグラフを A_dG で表す。

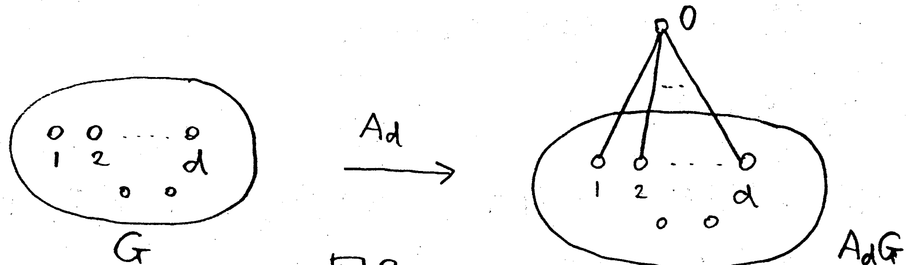


図2.

操作 B_d：グラフGに次数 $d+1$ の頂点0を新しく追加し，0に隣接する2点を結ぶ辺を1つ取り除く。その結果得られるグラフを B_dG で表す。

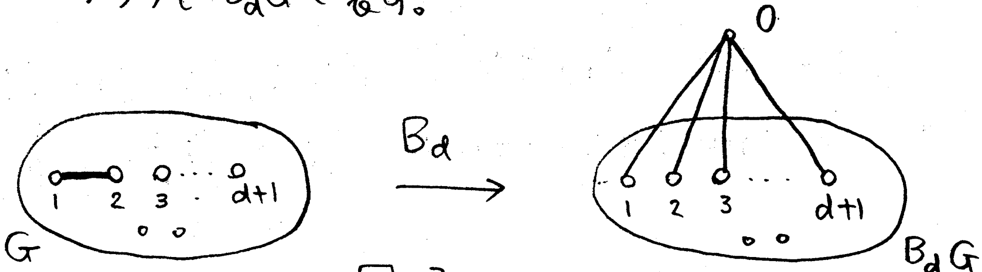


図 3

定理 3.1　Gを頂点数$\geqq d+1$のグラフとする。このとき

(1) G : d-定形 $\iff$ $A_d G$: d-定形

(2) G : d-定形 $\Rightarrow$ $B_d G$: d-定形

(注) (2)の逆は成立しない。例えば 下図（図4）を見よ。

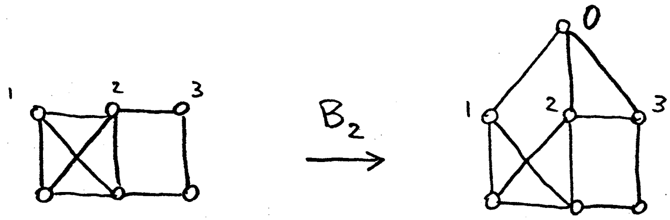


図 4.

証明　定理2.3により，次の(1)(2)を示せば十分である。

(1) $\mathrm{rank}_d(A_d G) = \mathrm{rank}_d(G) + d$

(2) $\mathrm{rank}_d(B_d G) \geqq \mathrm{rank}_d(G) + d$.

(1)の証明は簡単なので（(2)の証明を済ませると，そう思うようになる），以下 (2)の証明だけを行う。

Gの頂点を$1, 2, \cdots, n$とし，1と2が隣接しているとする。図3にあるように，$B_d G$では"新しい"頂点 0が $1, 2, \cdots, d-1$ に隣接し，辺 12 が取り除かれているとする。

$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$,　$p^+ = (p_0, p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$

とし，G, $B_d G$ のヤコビ行列を $J(p)$, $J^B(p^+)$ で表す。

すると $J(p)$ は

$$
\text{辺}\left\{
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \\
\hline
12 & 2(p_1-p_2) & 2(p_2-p_1) & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & & & K & & \\
\vdots & & & & & \\
\hline
\end{array}
\right.
$$

となっている。一方 $J^B(p^+)$ は

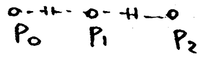
$$
\text{辺}\left\{
\begin{array}{c|c|cccc|c|}
 & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{頂点}}} & \\
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & d+1 & \cdots \\
\hline
01 & 2(p_0-p_1) & 2(p_1-p_0) & & & 0 & \\
02 & 2(p_0-p_2) & & 2(p_2-p_0) & & & 0 \\
\vdots & \vdots & & 0 & \ddots & & \\
0(d+1) & 2(p_0-p_{d+1}) & & & & 2(p_{d+1}-p_0) & \\
\hline
\vdots & 0 & & & K & & \\
\vdots & & & & & & \\
\hline
\end{array}
\right.
$$

この行列の 0-列目を 2-列目に加えると

$$
\begin{array}{|c|cccccc|c|}
\hline
2(p_0-p_1) & 2(p_1-p_0) & 2(p_0-p_1) & 0 & \cdots & & 0 & \\
2(p_0-p_2) & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \\
\vdots & \vdots & * & * & * & \cdots & & 0 \\
 & & * & & & & & \\
2(p_0-p_{d+1}) & 0 & \vdots\, * & & & & 2(p_{d+1}-p_0) & \\
\hline
0 & & & & K & & & \\
\hline
\end{array}
$$

となる。今，p は一般点としよう。すると $\mathrm{rank}(J(p)) = \mathrm{rank}_d(G)$。

また $p=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ は一般点だから, $d+1$ コの点 $p_1,p_2,\dots,p_{d+1}$ が $\mathbb{R}^d$ の超平面上に乗ることはない。さて, 点 p_0 を $p_0=2p_1-p_2$ としてとる。すると



$$p_1-p_0=p_2-p_1\ ,\quad p_2-p_0=2(p_1-p_0)$$

である。よって, 上の行列で

(a) 第2行目の $(-1/2)$ 倍を第1行目に加え, それから

(b) 第1行目に -1 を掛ける。

すると第1行目は

$$(0\,,2(p_0-p_1),2(p_1-p_0),0,\dots,0)=(0,2(p_1-p_2),2(p_2-p_1),0,\dots,0)$$

となる。それから

(c) 第1行目と第 $(d+1)$ 行目をとりかえると,

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 0 & 1\quad 2\quad 3 & \\
\hline
0(d+1) & 2(p_0-p_{d+1}) & & \\
02 & 2(p_0-p_2) & * & 0 \\
\vdots & \vdots & & \\
0d & 2(p_0-p_d) & & \\
\hline
01 & 0 & 2(p_1-p_2)\ \ 2(p_2-p_1)\ \ 0\cdots & 0\cdots0 \\
\hline
\vdots & 0 & K & \\
\hline
\end{array}$$

となる。d コのベクトル $\overrightarrow{p_0p_i}$ $(i=2,3,\dots,d+1)$ は明らかに線形独立だから, $d\times d$-行列

$$\begin{pmatrix} 2(p_0 - p_{d+1}) \\ 2(p_0 - p_2) \\ \vdots \\ 2(p_0 - p_d) \end{pmatrix}$$

は正則行列である。従って　$p_0 = 2p_1 - p_2$ としてとると

$$\mathrm{rank}(J^B(p^+)) = \mathrm{rank}(J(p)) + d = \mathrm{rank}_d(G) + d.$$

故に $\mathrm{rank}_d(B_d G) \geq \mathrm{rank}_d(G) + d$.　$\square$

（注）操作 A_d, B_d は，私自身は，Laman の定理（Laman (1970)）を一般化しようという試みの中で思いついたものであるが，すでに Tay-Whiteley (1985) で Henneberg の方法（Henneberg (1911)）の一般化として取り上げられていた。Tay-Whiteley (1985) では，定理 3.1 に相当することを，Whiteley の "substitution principle" というのを用いて"静力学"的に証明している。

例．定理 3.1 を用いて，$K(2,2,2)$ が 3-定形であることが，下図のように示される。

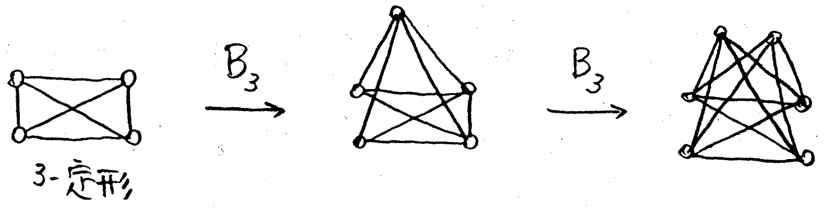


図 5

4. グラフの族 $\mathcal{F}(d)$ とグラフの join

完全グラフ K_{d+1} に操作 A_d, B_d, および"辺の追加"を何回か行って得られるグラフの全体を $\mathcal{F}(d)$ で表す。例えば図5から $K(2,2,2) \in \mathcal{F}(3)$ である。次の定理は明らか。

定理4.1 $G \in \mathcal{F}(d) \Rightarrow G$: d-定形. □

Laman (1970) により 位数 $\geqq 3$ の 2-定形グラフの全体は $\mathcal{F}(2)$ に一致することがわかる。ところが位数 $\geqq 4$ の 3-定形グラフの中には $\mathcal{F}(3)$ に入らないものがある。例えば、正20面体のグラフは 3-定形 (Asimov - Roth 1978) であるが、$\mathcal{F}(3)$ には入らない。操作 A_d, B_d, 辺の追加では、3-定形グラフを作るのに十分ではないのである。これについては、後でもう一度ふれるであろう。

2つのグラフ G と H の disjoint union $G \cup H$ に、G の点と H の点を結ぶ辺をすべて追加して得られるグラフを G と H の join といい、$G+H$ で表す。また位数 n の empty グラフを E_n と書く。つまり $E_n = \overline{K_n}$. そして $E_m + E_n = K(m,n)$.

定理4.2 G を位数 $d+1$, 辺数 m のグラフとするとき,

(1) $G+E_n$ が $(d+1)$-定形 $\Leftrightarrow G = K_{d+1} \Leftrightarrow G+E_n \in \mathcal{F}(d+1)$

(2) $G+E_n$ が d-定形 $\Leftrightarrow n \geqq \binom{d+1}{2} - m \Leftrightarrow G+E_n \in \mathcal{F}(d)$

証明 (1). まず，位数 $d+2$ 以下のグラフが $(d+1)$-定形であるのは完全グラフの場合に限ることに注意しよう．(例えば，(K_4 − 1辺) は図6に見られるように 3-定形でない。同様に (K_{d+2} − 1辺) も

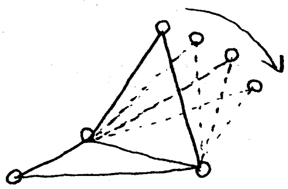


図6.

$(d+1)$-定形でないことがわかる。) 従って定理 3.1 (1) により

$$G+E_n : (d+1)\text{-定形} \iff G+E_1 : (d+1)\text{-定形}$$
$$\iff G+E_1 = K_{d+2} \iff G = K_{d+1}$$

(2). $n \geqq \binom{d+1}{2} - m$ と仮定．G は K_{d+1} から $\binom{d+1}{2} - m$ 個の辺を除くことによって得られるから，K_{d+1} に操作 B_d を

$$k := \binom{d+1}{2} - m$$

回くりかえして $G+E_k$ を得ることができる。これに操作 A_d を $n-k$ 回くりかえし，さらに辺を $n-k$ 個追加して $G+E_n$ が得られる。故に $G+E_n \in \mathcal{F}(d)$.

「$G+E_n \in \mathcal{F}(d) \Rightarrow G+E_n : d$-定形」は定理 4.1 による。

最後に $G+E_n$ が d-定形と仮定しよう。すると系 2.4 より

$$G+E_n \text{ の辺数} = m+(d+1)n \geqq (d+1+n)d - \binom{n+1}{d}$$

これから $n \geqq \binom{d+1}{2} - m$ を得る。 □

<u>系4.3</u> $G+E_n^{\vee}$ $(n\geqq 2)$ が d-定形ならば，$G=K_d$ かまたは，G の位数 $\geqq d+1$． □

定理4.2 (2) で $G=E_{d+1}$ とおくと

<u>系4.4</u> $K(d+1,\ d(d+1)/2)\in\mathcal{F}(d)$． □

Bolker-Roth (1980) では "stress" space の次元を計算することによって $K(d+1,\ d(d+1)/2)$ が d-定形であることを示している。

次の定理も明らか。

<u>定理4.5.</u> $G\in\mathcal{F}(d)\iff G+K_n\in\mathcal{F}(d+n)$ □

5. 完全多組グラフの定形性

系4.3より，$K(a,b)$ が d-定形ならば，$a=b=1$ または $a,b\geqq d+1$ である。次の定理は系4.4の拡張である。

<u>定理5.1</u> $1\leqq k\leqq d$ のとき

$$K\left(d+k,\ \binom{d+1}{2}-(k-1)\right)\in\mathcal{F}(d)$$

<u>証明</u> 頂点数 n のパスを P_n で表す。証明は次のチャートによる。

$$K_{d+1} = K_d + E_1 \xrightarrow{(B_d)^k} (K_d - (k-1)\text{辺}) + P_k$$

$$\xrightarrow{(A_d)^{d-k}} (K_d - (k-1)\text{辺}) + (P_k \cup E_{d-k})$$

$$\xrightarrow{A_d} ((K_d - (k-1)\text{辺}) \cup E_1) + (P_k \cup E_{d-k})$$

$$\xrightarrow{(B_d)^{\binom{d}{2}-(k-1)}} E_{d+1} + \left(P_k \cup E_{d-k} \cup E_{\binom{d}{2}-(k-1)}\right)$$

$$\xrightarrow{(B_d)^{k-1}} E_{d+k} + E_{\binom{d}{2}+d-(k-1)}$$

$$= K\left(d+k, \binom{d+1}{2}-(k-1)\right). \qquad \square$$

<u>例</u> $K(3,3) \in \mathcal{F}(2)$; $K(4,6), K(5,5) \in \mathcal{F}(3)$

完全2組グラフは，3角形をもたないから，その定形性は特別に興味をもたれていたようである。$K(3,3)$が2-定形であるのは，すでに19世紀には知られていたようであるが，$K(4,6)$, $K(5,5)$が3-定形であることは，Bolker-Roth (1980)で初めて証明されたようである。Bolker-Rothの方法を用いると，次の定理が得られる（Maehara, 1988）．証明は省略する

<u>定理5.2</u> $a, b > 0$, $a+b > 2$のとき

$$K(a,b)\text{が}d\text{-定形} \underbrace{\iff}_{a,\, b \geqq d+1,} a+b \geqq \binom{d+2}{2} \qquad \square$$

この定理は，本質的に Bolker-Roth (1988) に証明されているのだが，不思議なことに，彼等は，このような形に述べなかった。$K(d+1, d(d+1)/2)$ が d-定形であることは定理として述べているのだが。

一方，どんな大きな整数 a, b に対しても，$K(a,b)$ を平面上に実現したフレームで，変形するものが存在するのである (Homma-Maehara, 1988)

問題. $K(a,b)$ $(\neq K_2)$ が d-定形 $\Rightarrow K(a,b) \in \mathcal{F}(d)$?

($a \leq 2d$ なら 正しいことはわかっている (定理 5.1))

定理 5.1 に類似な結果を完全多組グラフについても導くことができる。しかし，記述がわずらわしいので，完全3組グラフの場合だけを とりあげよう。

定理 5.3 $0 < a \leqq b \leqq c$; $a+b, b+c, c+a \geqq d+1$ で

$$a+b+c \geqq \binom{d+2}{2} - \max_{\substack{i+j=a+b-(d+1) \\ a \geqq i \geqq 0,\ b \geqq j \geqq 0}} (a-i)(b-j)$$

ならば，$K(a,b,c) \in \mathcal{F}(d)$.

証明 $a+b = d+1+k$ $(k \geqq 0)$ とし，$i+j=k$ $(0 \leq i \leq a, 0 \leq j \leq b)$ なる i, j を1組 固定する。

$K_{d+1} = K_{a-i} + K_{b-j}$ に操作 B_d を c 回施して, K_{a-i}, K_{b-j} から c 個の辺を除き

$$(K_{a-i} - p\text{辺}) + (K_{b-j} - q\text{辺}) + E_c \qquad (p+q=c)$$

(もし, 途中で, K_{a-i}, K_{b-j} に辺が無くなるなら, 以後, 辺は除かなくてよい。) 次に B_d を $i+j=k$ 回 行って,

$$(K_{a-i} - p\text{辺}), \quad (K_{b-j} - q\text{辺})$$

の 辺をすべて消し $E_a + E_b + E_c$ としたい。

これは, $k+c \geqq \binom{a-i}{2} + \binom{b-j}{2}$ なら必ず可能である。

$$\binom{a-i}{2} + \binom{b-j}{2} = \frac{1}{2}\left\{(a-i)(a-i-1) + (b-j)(b-j-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(a-i)(d-(b-j)) + (b-j)(d-(a-i))\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{d((a-i)+(b-j)) - 2(a-i)(b-j)\right\} = \frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j)$$

故に

$$c \geqq \frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) - k \quad \text{なら OK.}$$

つまり

$$a+b+c \geqq a+b+\frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) - k \quad \text{なら}$$

$K(a,b,c) \in \mathcal{F}(d)$ である。

$$a+b+\frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) - k = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - (a-i)(b-j)$$

つまり　$a+b+c \geqq \binom{d+2}{2} - (a-i)(b-j)$

なら $K(a,b,c) \in \mathcal{F}(d)$ である。 i, j は，$a \geqq i \geqq 0$，$b \geqq j \geqq 0$，

$i+j = a+b-(d+1)$ ならどんな i, j でもよいから，定理が正しいことがわかる。 □

6. 3-定形，4-定形な完全多組グラフ

定理 6.1. 位数 $\geqq 4$ の完全多組グラフ G が 3-定形であるための必要十分条件は，G が次の中の1つを部分グラフとして含むことである。

$$K(4,6),\ K(5,5),\ K(2,2,2),\ K(1,3,3),\ K(1,1,1,1)$$

証明 (必要性)　$G = K(a,b)$ なら，定理 5.2 より，$a, b \geqq 4$ で $a+b \geqq \binom{5}{2} = 10$. 故に G は $K(4,6)$ か $K(5,5)$ を含む。

$G = K(a,b,c) = K(a,b) + E_c$ $(a \leqq b \leqq c)$ のとき，系 4.3 より $a+b \geqq 4$. 故に G は $K(1,3,3)$ または $K(2,2,2)$ を含む。

G が完全 k 組グラフ $(k \geqq 4)$ のとき，G は $K(1,1,1,1)$ を含む。

(十分性).　$K(4,6)$，$K(5,5)$ は定理 5.1 より 3-定形

$$K(2,2,2) = K(2,2) + E_2, \quad K(1,3,3) = K(1,3) + E_3$$

は定理 4.2 により 3-定形. $K(1,1,1,1) = K_4$ は明らかに 3-定形.

また，これらのうちの1つを含む完全多組グラフは明らかに $\mathcal{F}(3)$ に属する。

□

定理 6.1　位数 $\geqq 5$ の完全多組グラフ G が 4-定形

$\Leftrightarrow$ G は次の中の 1つを部分グラフとして含む

$K(5,10)$, $K(6,9)$, $K(7,8)$

$K(1,4,6)$, $K(1,5,5)$, $K(2,3,4)$, $K(3,3,3)$

$K(1,1,3,3)$, $K(1,2,2,2)$, $K(1,1,1,1,1)$

証明 ($\Rightarrow$)　$G = K(a,b)$ なら, 定理 5.2 より $a, b \geqq 5$, $a+b \geqq \binom{6}{2} = 15$. 故に G は $K(5,10)$, $K(6,9)$, $K(7,8)$ のいずれかを含む. $G = K(a,b,c)$ $(a \leqq b \leqq c)$ なら, 系 4.3 より $a+b \geqq 5$. さらに $a+b=5$ なら定理 4.2(2) より $c \geqq 15-ab-5$

従って, $(a,b) = (1,4)$ なら $c \geqq 6$

$(a,b) = (1,5)$ なら $c \geqq b = 5$

$(a,b) = (2,3)$ なら $c \geqq 4$

$(a,b) = (2,4)$ なら $c \geqq b = 4$

$(a,b) = (3,3)$ なら $c \geqq b = 3$

故に, 定理のリストの 2行目のグラフのいずれかを含む.

$G = K(a,b,c,d)$ $(a \leqq b \leqq c \leqq d)$ のとき, $a+b+c \geqq 5$

よって $(a,b,c) \geqq (1,1,3)$ または $(a,b,c) \geqq (1,2,2)$

故に G は $K(1,1,3,3)$ または $K(1,2,2,2)$ を含む.

G が完全 k 組グラフ $(k \geqq 5)$ のときは $K(1,1,1,1,1)$ を含む.

(⇐) $K(5,10)$, $K(6,9)$, $K(7,8)$ は 定理 5.1 により 4-定形.
$K(1,4,6)$, $K(1,5,5)$, $K(2,3,4)$, $K(3,3,3)$ は 定理 5.3 より 4-定形。 $K(1,1,3,3) = K(1,3,3)+E_1$ と、
$K(1,2,2,2) = K(2,2,2)+E_1$ は 定理 4.5 により $\mathcal{F}(4)$ に属する。
$K(1,1,1,1,1) = K_5 \in \mathcal{F}(4)$. G がこれらの中の1つを含むなら、明らかに $G \in \mathcal{F}(4)$. 故に G は 4-定形. □

7. 最後に

2-定形グラフの特徴づけは、Laman (1970) によってなされた。しかしながら、3-定形グラフの特徴づけは難しく未解決である。その理由の1つは、3-定形グラフを構成する方法が十分にないことである。

A_d, B_d に類似な操作としてまっ先に思いつくのは次の C_d であろう

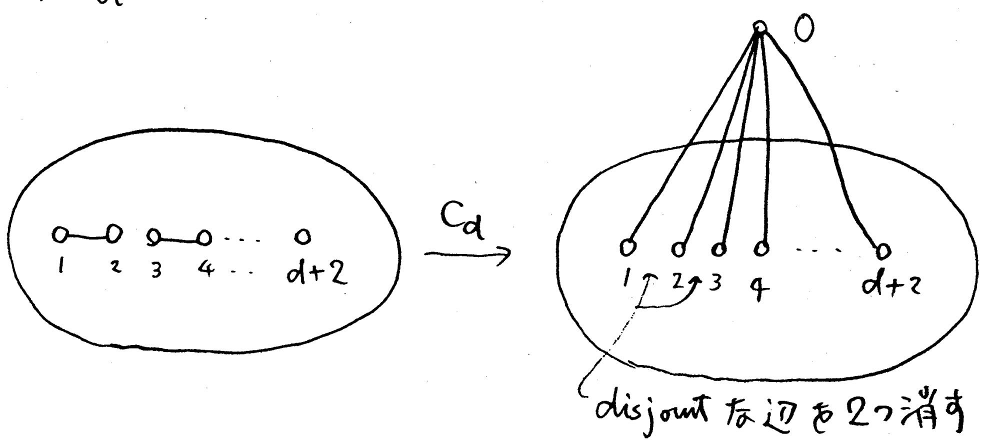


図 7.

Tay-Whiteley (1985) は Graver の予想と呼ばれるもう少し一般的な予想 (Graver 1984) からの直接の帰結として

「G : d-定形 ⇒ $C_d G$: d-定形」

を述べている。しかし，これは正しくない，従って Graver の予想も正しくないことが判明している (Maehara 1988)

従って，3-定形性問題や，Henneberg の方法を拡張する問題等は，未だこれからの話と言える。

Lovasz-Yemini (1982) は，6-連結なグラフはすべて 2-定形であることを示した。しかし彼等の方法も本質的に Laman の定理を用いるので高次元への一般化は難しい。

最後に，多面体 (polyhedral surface) の $\mathbb{R}^3$ への埋込みについて：多面体の各面は，隣の面とチョウツガイでつなぎ合わされていて，どの2面角も（他からの制約がなければ）自由に動ける状態にあるとしよう。Euler は，多面体はすべて定形 (rigid) であると予想したが，これは誤りであることが，Connelly (1978) によって示された。Connelly は，球面と同相で，各面が3角形である，「変形」する多面体を作ってみせた。

問題．平面上の任意の実現が定形となるグラフの特徴づけは？

参考文献

[1] L. Asimov & B. Roth (1978), Rigidity of graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 245, 279-289

[2] ―――――― (1979), Rigidity of graphs II, J. Math. Anal. App. 68, 279-289

[3] E.D. Bolker & B. Roth (1980), When is a bipartite graph a rigid framework?, Pacific J. Math. 90, 27-44.

[4] R. Connelly (1978), A counter-example to the rigidity conjecture for polyhedra, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 47, 333-338

[5] J. Graver (1984), A combinatorial approach to infinitesimal rigidity,

[6] L. Henneberg (1911), Die Graphische Statik der Starren System, Liepzig 1911, Johnson Reprint 1968

[7] M. Homma & H. Maehara (1988), algebraic distance graphs and rigidity, submitted

[8] G. Laman (1970), On graphs and rigidity of plane skeletal structure, J. Engineering Math. 4, 331-340

[9] L. Lovasz & Y. Yemini (1982), On generic rigidity in the plane, SIAM J. Algebraic & Discrete Methods 3, 91-98

[10] H. Maehara (1988), On Graver's conjecture, submitted

[11] B. Roth (1981), Rigid and flexible frameworks, Amer. Math. Monthly 88, 6-211

[12] T.S. Tay & W. Whiteley (1984), Recent progress in the generic rigidity of structures, Structural Topology 9, 31-38

[13] ―――――― (1985), Generating isostatic frameworks, Structural Topology 11, 21-69